Prof. Dr. Alfred Toth

Phänomenologische Klassifikation von Funktionen

1. In der elementaren Mathematik beschränkt man sich darauf, Funktionen als injektiv, surjektiv oder bijektiv zu klassifizieren, je nachdem, ob die Abbildungen von Elementen aus einer Domäne auf eine Codomäne eindeutig, vollständig oder umkehrbar sind. Es ist aber in der klassischen Mathematik nicht einmal vorstellbar, daß es Abbildungen geben kann, welche die Elemente dieser beiden Mengenbereiche selbst beeinflussen.

2. Wird ein $x \in D$ auf ein $y \in C$ abgebildet, so gibt es theoretisch die folgenden Möglichkeiten.

2.1. $(x \to y) \to [x, y]$

2.2. $(x \to y) \to [x_y, y]$

2.3. $(x \to y) \to [x, y_x]$

In 2.1. wird einfach einem x ein y zugeordnet. Dies und nur dies ist der klassische Fall der Abbildung, der injektiv, surjektiv oder bijektiv sein kann. Dagegen geschieht etwas mit x und y in den beiden anderen Fälle. In 2.2. trägt x bei der Abbildung auf y die Spur von y an sich, und in 2.3. ist es genau umgekehrt. Um solche Typen von Abbildungen anzutreffen, muß man ins qualitative Gebiet der Sprachtheorie wechseln; 2.2. ist der kataphorische Fall, 2.3. der anaphorische Fall, vgl.

(1) Wer sie (x_y) einmal gesehen hat, vergißt Barbara (y) nie mehr.

(2) Weil Hans (x) gut verdient, kann er (y_x) sich ein Auto leisten.

3. Man kann sich jedoch auch vorstellen, daß die Abbildung $x \to y$ entweder x oder y tilgt; dann sind theoretisch folgende Fälle möglich:

3.1. $(x \to y) \to [\varnothing, y]$

3.2. $(x \to y) \to [x, \varnothing]$

3.3. $(x \rightarrow y) \rightarrow [\varnothing, \varnothing]$

Diese drei Fälle sind im Grunde funktionale Ausdrücke für Erhaltungssätze, denn 3.1. impliziert, daß ein auf y abgebildetes x von y absorbiert wird. 3.2. ist der dazu umgekehrte Fall, und in 3.3. findet nicht nur Absorption des x durch y, sondern dadurch bedingte Eliminierung des y statt. Z.B. gilt in der Körpermultiplikation mit $K = \{0, 1\}$:

$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 \cdot 1 = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$
$1 + 1 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$

(vgl. Toth 2006, S. 50). In der Sprachtheorie müssen die Leerstellen jedoch referent bzw. coreferent sein, um die Kohärenz aufrechtzuerhalten, vgl.

(3) ($\varnothing_x$) War ein armer Wandergesell (y_x).

(4) Ein Schuster (x) lebte zu Breslau und ($\varnothing_x$) hatte eine schöne Tochter.

Für den Fall 3.2. gibt es somit kein sprachliches Beispiel.

4. Die dargestellten 6 phänomenologischen Typen von Abbildungen dürften jedoch nur die Spitze des Eisberges ausmachen, denn Sprachen z.B. halten sehr viel komplexe Möglichkeiten bereit. Die folgenden Beispiele seien daher vorerst als Anregungen zum Nachdenken intendiert:

(5) Jennifer is married, and happily so.

(6) (a) John can play the guitar. Mary can too.

(b) Hans spielt Guitarre, Mary auch.

(c) Haribo macht Kinder froh, und Erwachsene ebenso.

(7) (Zürichdt.) Das hani dir doch geschtig scho gsait, und seb hani.

(8) (Zürichdt.) Ich und dich uslache, was stellsch der denn au vor.

(9) (a) (Rätorom.) Saver savein nus buca.

(b) (Dt.) Wissen tun wir es nicht.

(c) (Span.) Por no saber, no sabemos ni su nombre.

(d) (Franz.) C'est forgeant qu'on devient forgeron.

(10) (a) (alter Kanzleistil) Er ist krank und ist er nicht zur Arbeit erschienen.

(b) ??Krank ist er und ist er nicht zur Arbeit erschienen.

(c) ?Krank ist er und er ist nicht zur Arbeit erschienen.

Mit Ausnahme von (10) werden also mehrere Elemente x auf Leerstellen, und zwar teils mit, teils ohne Spuren, abgebildet. Wir müssen hier also von $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ und $Y = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_n\}$ ausgehen und haben z.B. folgende Abbildung (o.B.d.A.):

$$(\{x_1, ..., x_n\} \rightarrow \{y_1, ..., y_n\}) \rightarrow [\{x_1, ..., x_i\}, \{y_1, ..., y_j\}],$$

das bedeutet aber nichts anderes, als daß die Differenzen $(x_n - x_i)$ und $(y_n - y_j)$ genau diejenigen Elemente sind, die durch Leerstellen ersetzt werden.

5. Als weitere Anregung für künftige Untersuchungen sei speziell darauf hingewiesen, daß wir die Elemente der Abbildungen $X \rightarrow x$ als geordnete Paare [x, y] notiert haben. Damit werden natürlich Konversionen verhindert. Es ist allerdings höchst interessant zu untersuchen, wann solche möglich sind und wann nicht, vgl. z.B.

(11) *Er bleibt zu Hause, weil Hans krank ist. (Umkehr der Anapher)

(12) *Er vergißt Barbara nie mehr, wer sie einmal gesehen hat. (U.d. Kataph.)

(13) *Ein armer Wandergesell war.

(14) *And happily so, Jennifer is married.

(15) *Und Erwachsene ebenso, macht Haribo Kinder froh.

(16) *Und seb hani, das hani dir doch geschtig scho gsait.

(17) ??Wir tun es/das nicht, schwimmen.

(18) ?Was stellsch du dir au vor, ich und dich uslache.

(19) (a) *Und ist er nicht zur Arbeit erschienen, krank ist er.

(b) *Ist er nicht zur Arbeit erschienen, und krank ist er.

Bei Fällen wie (11) und (12) stehen wir vor der mathematisch seltsam anmutenden Tatsache, daß solche Fälle die Abbildungen von Elementen aus mehreren Domänen auf eine einzige Codomäne voraussetzen. Das bedeutet linguistisch nichts anderes, als daß diese Sätze grammatisch sind, wenn die pronominalisierten Spuren entweder als fremdreferent gedacht werden (anaphorischer Fall) oder wenn die Referenz z.B. auf ein Dummy abgeschoben wird (kataphorischer Fall), wenn wir also z.B. haben

(11) Er_j bleibt zu Hause, weil $Hans_i$ krank ist. ($i \neq j$)

(12) Es_i vergißt $Barbara_j$ nie mehr, wer_i sie_j einmal gesehen hat.

Ganz speziell ist hier auf das Dummyelement „es" hinzuweisen, denn erstens ist es mit einem Pronomen, also eine sich auf einen Namen beziehenden Kopie, koreferent, was an sich schon merkwürdig genug ist, denn das dt. „es" ist sonst nicht-referent, vgl. den folgenden Kontrast

(13) (dt.) Es war einmal ein alter König ... [-ref]

(franz.) C'était une fois un vieux roi ... [+ ref],

und zweitens ist es ein Subjekt, das im Akkusativ steht (so etwas gibt es sonst nur in Ergativsprachen), denn (12) kann man sofort durch „Fronting" des Objekts (!) transformieren in

(14) $Barabra_j$ vergißt $\varnothing_i$ nie mehr, wer_i sie_j einmal gesehen hat.

In (14) haben wir nun also zwar wie in (12) 2 Abbildungen, aber die koreferenten i stehen nun zwischen den ebenfalls koreferenten j, d.h. die erste Abbildung ist zur Teilmenge der ersten geworden!! So etwas ist mathematisch natürlich ganz und gar unmöglich, und trotzdem existiert es, und trotzdem haben es die Vertreter der in den 60er Jahren so üppig wuchernden „mathematischen Linguistik" übersehen, und trotzdem ist es auch noch keinem Semiotiker aufgefallen. Wir brauchen also nur Max Benses kurzem Hinweis, nach „gemeinsamen Einbruchstellen zwischen Linguistik und

Semiotik zu suchen" (1967, S. 58 ff.), nachzugehen, und schon tut sich uns eine ganz unerwartete Seite der Mathematik auf, die wir nie geahnt hätten.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

21.7.2011